Johannes Gutenberg-Universität Mainz — Institut für Physik

Mathematischer Brückenkurs

Sommersemester 2022 — **Übungsblatt 3**

Vorlesung: Dr. C. Bogner

Übungsleiter: R. Märkl, K. Kleineidam, M. Liesenfeld, L. Frondorf, L. Kessel, M. Ambach

Aufgabe 1: Induktionsbeweise

Beweisen Sie folgende Aussagen mittels vollständiger Induktion:
Hinweis zu (b): kleiner Gauß
Hinweis zu (d): Additionstheorem für cos

(a) $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

(c) $$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{j=1}^{n} j\right)^2$$

(b) $$(n+1)! > n(n+1) \quad \forall n \geq 4$$

(d) $$\cos(n\pi) = (-1)^n \quad \forall n \geq 1$$

Aufgabe 2: Beweis mittels Fallunterscheidung

Beweisen Sie folgende Ungleichungen mittels Fallunterscheidung:

(a) $$||a| - |b|| \leq |a \pm b|$$

(b) $$|a \pm b| \leq |a| + |b|$$

Aufgabe 3: Folgenkonvergenz

Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz/Divergenz und geben Sie bei Konvergenz den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}$ an:

(a) $$a_n = \frac{n}{n^3 + n^2 + 1}$$

(e) $$a_n = -2^n$$

(b) $$a_n = \frac{n+1}{n+2}$$

(f) $$a_n = \frac{n^3 + 4n}{n+1}$$

(c) $$a_n = (-1)^n$$

(g) $$a_n = e^{\frac{1}{n!}}$$

(d) $$a_n = \sin(n\pi)$$

(h) $$a_n = n^{-n}$$

Aufgabe 4: Eigenschaften von Folgen

Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Beschränkung, Monotonie, und Konvergenz:

(a) $$a_n = 5$$

(c) $$a_n = \frac{1}{n}\sin(\frac{n\pi}{2})$$

(b) $$a_n = \sqrt{n+1}$$

(d) $$a_n = 3^{-n} - 7^{-n}$$

Aufgabe 5: Reihenkonvergenz

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $$s_n = \sum_{k=0}^{\infty} k$$

(c) $$s_n = \sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

(b) $$s_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

(d) $$s_n = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$$

Bonusaufgabe zu (a): Zeigen Sie, dass $s_n = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ (Geometrische Reihe)