Mathematische Grundlagen, Sommer 2018 **Übungsblatt 3**

Vorlesung: Dr. C. Bogner Abgabe: 07.05.2018

Übungsleitung: R. P. Klausen und K. Schultka

Aufgabe 5: Laplace-Operator (4 Punkte)

Beweisen Sie für den Laplace-Operator $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$, dass für skalare Felder $f(\vec{x})$, $g(\vec{x})$ und Vektorfelder $\vec{V}(\vec{x})$ die folgenden Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \left(f(\vec{x}) \, \vec{\nabla} g(\vec{x}) - g(\vec{x}) \, \vec{\nabla} f(\vec{x}) \right) &= f(\vec{x}) \, \Delta g(\vec{x}) - g(\vec{x}) \, \Delta f(\vec{x}) \,, \\ \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{V}(\vec{x}) \right) &= \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}(\vec{x}) \right) - \Delta \vec{V}(\vec{x}) \,. \end{aligned}$$

Aufgabe 6: Komplexe Zahlen (1+6+4+2+8+2 Punkte)

a) Berechnen Sie die Beträge $|1+i|$ und $\left|\frac{1}{i}\right|$.

b) Geben Sie die komplexen Zahlen $\frac{1-i}{1+i}$, $\frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i}{1-i}$ und $-\frac{1+3i}{2+i}$ je in Normaldarstellung, Polardarstellung und Exponentialdarstellung an.

c) Zeigen Sie, dass für $z_1 = |z_1| \left(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1\right)$, $z_2 = |z_2| \left(\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2\right)$ die folgenden Relationen gelten:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1||z_2| \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right) \,, \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1|}{|z_2|} \left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right) \,. \end{aligned}$$

> Hinweis: Sie können die Relationen $\sin(-x) = -\sin(x)$, $\cos(-x) = \cos(x)$, $\sin(x+y) = \sin x \, \cos y + \cos x \, \sin y$, $\cos(x+y) = \cos x \, \cos y - \sin x \, \sin y$ oder die Exponentialdarstellung benutzen.

d) Beweisen Sie, dass für $z = |z| \left(\cos\varphi + i \sin\varphi\right)$ gilt

$$z^n = |z|^n \left(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)\right) \; \forall n \in \mathbb{N}.$$

> Hinweis: Wenn ein Beweis verlangt wird, dass eine bestimmte Gleichung $f(n) = g(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt, können Sie diesen Beweis oft wie folgt konstruieren. Beweisen Sie einzeln die Aussagen:
> (A1) Es gilt $f(1) = g(1)$. (Induktionsanfang)

(A2) Falls $f(k) = g(k)$ gilt folgt daraus $f(k+1) = g(k+1)$. (Induktionsschritt)
Wenn A1 und A2 bewiesen sind folgt daraus $f(n) = g(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Man spricht dann von einem Induktionsbeweis.

e) Geben Sie für jede der beiden Gleichungen

$$x^3 = 1,$$
$$x^4 = 7$$

alle komplexen Lösungen in Normaldarstellung, Polardarstellung und Exponentialdarstellung an. Zeichnen Sie eine Skizze, in der Sie diese Lösungen als Punkte in der komplexen Ebene markieren.

f) Geben Sie die Linearfaktorzerlegung des Polynoms

$$p(x) = x^3 - x^2 + x - 1,\ x \in \mathbb{C}$$

an. Wie lauten die komplexen Nullstellen von $p(x)$?

Aufgabe 7: Gruppen und Körper (3+3+3 Punkte)

Begründen Sie alle Antworten auf die folgenden Fragen mit Hilfe der definierenden Eigenschaften von Gruppen und Körpern.

a) Untersuchen Sie für jede der folgenden Mengen, ob es sich um eine Gruppe bezüglich der üblichen Addition handelt[1]: $\mathbb{N}$, $\{2x|x \in \mathbb{Z}\}$, $\{1, -1\}$.

b) Untersuchen Sie für jede der folgenden Mengen, ob es sich um eine Gruppe bezüglich der üblichen Multiplikation handelt: $\{1, -1\}$, $\{1, 0, -1\}, \mathbb{Q}$.

c) Auf der Menge $F = \{0, 1\}$ seien zwei Verknüpfungen $\oplus$ und $\cdot$ durch folgende Relationen definiert:

$$\begin{aligned} 0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 &= 0, \\ 0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 &= 1, \\ 0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 &= 0, \\ 1 \cdot 1 &= 1. \end{aligned}$$

(Beachten Sie den Unterschied zwischen der Verknüpfung, die wir hier $\oplus$ nennen, und der herkömmlichen Addition.) Ist F bezüglich dieser Verknüpfungen ein Körper? Überprüfen Sie die Eigenschaften.

[1] Die Menge $\{2x|x \in \mathbb{Z}\}$ ist die Menge der geraden Zahlen inklusive der Null.