Humboldt-Universität zu Berlin — Institut für Physik

Mathematische Grundlagen, Sommer 2018 — **Übungsblatt 2**

Vorlesung: Dr. C. Bogner — Abgabe: 30.04.2018

Übungsleitung: R. P. Klausen und K. Schultka

Aufgabe 3: Eigenschaften von Funktionen (4+6+2)

a) Geben Sie zu jeder der folgenden Funktionen an, ob sie injektiv, surjektiv oder bijektiv ist:

$$f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ x \mapsto 2x+2,$$
$$f_2 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ x \mapsto 2x+2,$$
$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2+2,$$
$$f_4 : [0,\infty) \to [2,\infty),\ x \mapsto x^2+2.$$

b) Geben Sie zu jeder der folgenden Funktionen die inverse Funktion an und skizzieren Sie je den Funktionsgraphen der Funktion und der inversen Funktion:

$$g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x-1,$$
$$g_2 : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\},\ x \mapsto \frac{1}{x},$$
$$g_3 : \mathbb{R} \to (0,\infty),\ x \mapsto e^x.$$

c) Betrachten Sie Mengen M_1, M_2, M_3 und zwei Abbildungen

$$f : M_1 \to M_2,$$
$$g : M_2 \to M_3.$$

Beweisen Sie: Falls f und g injektiv sind ist auch $g \circ f$ injektiv.

Aufgabe 4: Gradient, Divergenz und Rotation (4+8+10 Punkte)

Die Raumkoordinaten des $\mathbb{R}^3$ seien hier mit x_1, x_2, x_3 bezeichnet.

a) Berechnen Sie die folgenden partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1^2 x_2 + 3x_1 + x_2\right), \quad \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{x_2+1}{x_1-x_2}\right), \quad \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1^3 x_2 + x_2\right)\right), \quad \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_1^3 x_2 + x_2\right)\right)$$

b) Berechnen Sie:

$$\vec{\nabla}\left(x_1+x_2+x_3\right), \quad \vec{\nabla}\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right), \quad \vec{\nabla} 9 x_1 x_2 x_3^2, \quad \vec{\nabla} x_1 x_2 \sin\left(x_3\right),$$

$$\vec{\nabla}\cdot\begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla} x_1 x_2 \sin\left(x_3\right)\right), \quad \vec{\nabla}\times\begin{pmatrix} x_1 x_3^2 \\ x_1 x_2 x_3 \\ x_1 x_2^2 \end{pmatrix}, \quad \vec{\nabla}\times\begin{pmatrix} x_2 \sin\left(x_3\right) \\ x_1 \sin\left(x_3\right) \\ x_1 x_2 \cos\left(x_3\right) \end{pmatrix}.$$

c) Beweisen Sie, dass für beliebige[1] skalare Felder $f\left(\vec{x}\right)$, $g\left(\vec{x}\right)$ und beliebige Vektorfelder $\vec{V}\left(\vec{x}\right)$ gilt:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\left(f\left(\vec{x}\right)\cdot g\left(\vec{x}\right)\right) &= f\left(\vec{x}\right)\vec{\nabla} g\left(\vec{x}\right) + g\left(\vec{x}\right)\vec{\nabla} f\left(\vec{x}\right), \\
\vec{\nabla}\cdot\left(f\left(\vec{x}\right)\vec{V}\left(\vec{x}\right)\right) &= f\left(\vec{x}\right)\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{V}\left(\vec{x}\right)\right) + \vec{V}\left(\vec{x}\right)\cdot\left(\vec{\nabla} f\left(\vec{x}\right)\right), \\
\vec{\nabla}\times\left(f\left(\vec{x}\right)\vec{V}\left(\vec{x}\right)\right) &= f\left(\vec{x}\right)\left(\vec{\nabla}\times\vec{V}\left(\vec{x}\right)\right) - \vec{V}\left(\vec{x}\right)\times\left(\vec{\nabla} f\left(\vec{x}\right)\right), \\
\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla} f\left(\vec{x}\right)\right) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{V}\left(\vec{x}\right)\right) &= 0.
\end{aligned}$$

(Hinweis: $\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} f = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i} f$)

[1] Bemerkung: Genau genommen müssen die Felder so beschaffen sein, dass die entsprechenden Ableitungen existieren. Das setzen wir hier voraus. Funktionen, deren Ableitungen nicht immer existieren, besprechen wir später in der Vorlesung.